

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета факультета математики,
информационных и авиационных технологий
от «16» мая 2023 г. протокол 4/23
Председатель М.А. Волков



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина	Вариационное исчисление
Факультет	Математики, информационных и авиационных технологий
Кафедра	Прикладной математики
Курс	1

Направление (специальность): 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль/специализация): Имитационное моделирование и анализ данных

Форма обучения: очная

Дата введения в учебный процесс УлГУ:

1 сентября 2023 г.


Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № ___ от ___ 20__ г.

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № ___ от ___ 20__ г.

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № ___ от ___ 20__ г.

Сведения о разработчиках:

ФИО	Кафедра	Должность, ученая степень, звание
Савинов Ю.Г.	ПМ	Доцент, к.ф.м.н., доцент

СОГЛАСОВАНО
Заведующий выпускающей кафедрой прикладной математики
 / <u>Бутов А.А.</u> / Подпись / ФИО «16» мая 2023 г.

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

Учебная дисциплина «Вариационное исчисление» знакомит студентов с классическими методами вариационного исчисления. Она является одной из дисциплин по выбору по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Цель дисциплины: ознакомление студентов с основами методов вариационного исчисления; формирование навыков работы с абстрактными понятиями математики; знакомство с прикладными задачами дисциплины.

Основной задачей изучения дисциплины является освоение базовой техники составления и решения задач вариационного исчисления, которые естественным образом возникают во многих областях человеческой деятельности. Для его понимания необходимо знакомство с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений в объеме курса бакалавриата.

Дисциплина «Вариационное исчисление» базируется на знаниях и умениях, полученных студентами при изучении курсов (по программам бакалавриата или специалитета): математический анализ, алгебра и геометрия, дифференциальные уравнения.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП:

Дисциплина «Вариационное исчисление» относится к дисциплинам по выбору части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1 «Дисциплины (модули)» Основной Профессиональной Образовательной Программы по направлению 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Данная дисциплина базируется на входных знаниях, умениях, навыках и компетенциях студента, полученных им в бакалавриате.

Результаты освоения дисциплины будут необходимы для дальнейшего процесса обучения в рамках поэтапного формирования компетенций при изучении последующих дисциплин (указаны в ФОС, пункт 1): «Математическое моделирование сложных систем», а также для прохождения всех видов практик и государственной итоговой аттестации.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ), СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОСНОВНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ


Код и наименование реализуемой компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с индикаторами достижения компетенций
ПК-3 способность разрабатывать аналитические обзоры состояния области прикладной математики и информационных технологий	знать основные определения, формулировки теорем и постановки основных типов задач вариационного исчисления уметь решать основные типы задач вариационного исчисления владеть методами решения основных типов задач вариационного исчисления

4. ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины в зачетных единицах (всего): 5 зачетных единиц.

4.2. Объем дисциплины по видам учебной работы (в часах):

Вид учебной работы	Количество часов (форма обучения: очная)
--------------------	--

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

1	Всего по плану	В т.ч. по семестрам
		1
1	2	3
Контактная работа обучающихся с преподавателем в соответствии с УП	366	36
Аудиторные занятия	36	36
Лекции	18	18
Семинары и практические занятия	–	–
Лабораторные работы, практикумы	18	18
Самостоятельная работа	108	108
Форма текущего контроля знаний и контроля самостоятельной работы: тестирование, контр. работа, коллоквиум, реферат и др. (не менее 2 видов)	устный опрос, сдача лабораторных работ	устный опрос, сдача лабораторных работ
Курсовая работа	–	–
Виды промежуточной аттестации (экзамен, зачет)	экзамен 36	экзамен 36
Всего часов по дисциплине	180	180

*В случае необходимости использования в учебном процессе частично/исключительно дистанционных образовательных технологий в таблице через слеш указывается количество часов работы ППС с обучающимися для проведения занятий в дистанционном формате с применением электронного обучения

4.3. Содержание дисциплины (модуля). Распределение часов по темам и видам учебной работы:

Форма обучения: очная.

Название разделов и тем	Всего	Виды учебных занятий					Форма текущего контроля знаний
		Аудиторные занятия			Занятия в интерактивной форме	Самостоятельная работа	
		Лекции	Практические занятия, семинары	Лабораторные работы, практикумы			
1	2	3	4	5	6	7	8
2 семестр							
Раздел 1. ВВЕДЕНИЕ							
1.1. История развития вариационного исчисления	9	1				8	устный опрос
Раздел 2. Классические задачи вариационного исчисления							
2.1. Функционал. Экстремум функционала. Вариация и ее	11	1		-		10	устный опрос

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

свойства							
2.2. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера	12	2		-		10	устный опрос
2.3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами	21	2		9		10	устный опрос, проверка лабораторной работы
2.4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами	21	2		9		10	устный опрос, проверка лабораторной работы
2.5. Задача Больца. Условия трансверсальности в задаче Больца. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче Больца	12	2				10	устный опрос
2.6. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования экстремума в	12	2				10	устный опрос

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

задаче Лагранжа							
Раздел 3. Условия второго порядка							
3.1. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса. Достаточные условия существования экстремума	23	2				20	устный опрос
3.2. Два подхода к исследованию задач вариационного исчисления. Функциональное пространство. Производные Фреше и Гато	12	2				10	устный опрос
3.3 Понятие о численных методах решения задач вариационного исчисления	12	2				10	устный опрос
Экзамен	36						
Всего	180	18			18	108	

5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Раздел 1. Введение

1.1 История развития вариационного исчисления.

Раздел 2. Классические задачи вариационного исчисления

2.1. Функционал. Экстремум функционала. Вариация и ее свойства.

2.2. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

2.3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.

2.4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами.

2.5. Задача Больца. Условия трансверсальности в задаче Больца. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче Больца.

2.6. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования экстремума в задаче Лагранжа.

Раздел 3. Условия второго порядка

3.1. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса. Достаточные условия существования экстремума.

3.2. Два подхода к исследованию задач вариационного исчисления. Функциональное пространство. Производные Фреше и Гато.

3.3 Понятие о численных методах решения задач вариационного исчисления.

6. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

Данный вид работы не предусмотрен учебным планом.

7. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ, ПРАКТИКУМЫ

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

По блоку математических и естественнонаучных дисциплин используются различные пакеты (свободно распространяемые для использования в учебных целях или на которые у УлГУ есть лицензии) прикладных программ, таких как Maple 16: Universities or Equivalent Degree Granting Institutions Non-Floating New License 5 to 100 Users Academic (академическая, бессрочная). При выполнении лабораторных работ возможно использование других пакетов (Mathcad, Mathematica, MatLab и др.).

Раздел 2. Классические задачи вариационного исчисления

Тема 2.4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами.

Лабораторная работа № 1. *Найти расстояние между кривыми в пакете Maple.*

Методические указания (рекомендации): использовать команды **Diff, diff, dsolve**.

Введем обозначения: $Y = y(x)$, $DY = y'(x)$, $D2Y = y''(x)$, $x_0 = x_0$, $x_1 = x_1$,
 $y_0 = y_0$, $y_1 = y_1$.

Пример 1. Найти расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $y = x - 5$.


Решение: Эта задача с подвижными границами. Задача сводится к нахождению экстремального значения функционала $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2} dx$, при условии, что левый конец экстремали может перемещаться по кривой $y = \varphi(x) = x^2$, а правый – по прямой $y = \psi(x) = x - 5$.

1. Задаем подынтегральную функцию:

>restart;

>F:=(x,Y,DY)->sqrt(1+DY^2);

$$F := (x, Y, DY) \rightarrow \sqrt{1 + DY^2}$$

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

> $x0:=X0;x1:=X1;$

$$x0 := X0 \quad x1 := X1$$

2. Задаем две фиксированные кривые $y = x^2$ и $y = x - 5$, находим их производные:

> $F1:=(x)->x^2; dF1:=diff(F1(x),x);$

$$F1 := x \rightarrow x^2 \\ dF1 := 2x$$

> $F2:=(x)->x-5; dF2:=diff(F2(x),x);$

$$F2 := x \rightarrow x - 5 \\ dF2 := 1$$

3. Составляем функционал:

> $J:=int(F(x,y(x),diff(y(x),x)),x=x0..x1);$

$$J := \int_{x0}^{x1} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2} dx$$

4. Записываем основную формулу уравнения Эйлера:


> $eq:=diff(F(x,Y,DY),Y)-diff(diff(F(x,Y,DY),x),DY)-diff(diff(F(x,Y,DY),Y),DY)*DY-diff(F(x,Y,DY),DY^2)*D2Y=0;$

$$eq := - \left(- \frac{DY^2}{(1 + DY^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + DY^2}} \right) D2Y = 0$$

5. Выполняем замены (операторsubs) $Y = y(x)$, $DY = y'(x)$, $D2Y = y''(x)$:

> $eq1:=subs(Y=y(x),DY=diff(y(x),x),D2Y=diff(y(x),x^2),eq);$

$$eq1 := - \left(- \frac{\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) = 0$$

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

6. Находим общее решение уравнения Эйлера:

> rez:=dsolve(eq1);

$$rez := y(x) = _C1 x + _C2$$

> assign(rez):y(x):

7. Записываем условия трансверсальности:

$$\left[F(x, y, y') + (\varphi' - y') F_{y'}(x, y, y') \right]_{x=x_0} = 0, \left[F(x, y, y') + (\psi' - y') F_{y'}(x, y, y') \right]_{x=x_1} = 0.$$

> dFdY:=diff(F(x,Y,DY),DY);

$$dFdY = \frac{DY}{\sqrt{1 + DY^2}}$$

> df:=subs(Y=y(x),DY=diff(y(x),x),D2Y=diff(y(x),x\$2),dFdY):

> us_t1:=F(x,y(x),diff(y(x),x))+(dF1-diff(y(x),x))*df=0;

$$us_t1 := \sqrt{1 + _C1^2} + \frac{(2x - _C1) _C1}{\sqrt{1 + _C1^2}} = 0$$

> us_t2:=F(x,y(x),diff(y(x),x))+(dF2-diff(y(x),x))*df=0;


$$us_t2 := \sqrt{1 + _C1^2} + \frac{(1 - _C1) _C1}{\sqrt{1 + _C1^2}} = 0$$

> a:=subs(x=x0,us_t1);

$$a := \sqrt{1 + _C1^2} + \frac{(2X0 - _C1) _C1}{\sqrt{1 + _C1^2}} = 0$$

> b:=subs(x=x1,us_t2);

$$b := \sqrt{1 + _C1^2} + \frac{(1 - _C1) _C1}{\sqrt{1 + _C1^2}} = 0$$

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

8. Записываем граничные условия

$$y(x_0) = C_1 x_0 + C_2 = \varphi(x_0) = x_0^2, \quad y(x_1) = C_1 x_1 + C_2 = \psi(x_1) = x_1 - 5.$$

> `left:=subs(x=x0,y(x))=F1(x0);`

$$left := _C1 X0 + _C2 = X0^2$$

> `right:=subs(x=x1,y(x))=F2(x1);`

$$right := _C1 X1 + _C2 = X1 - 5$$

9. Находим $_C1$, $_C2$, $X0$, $X1$ и экстремаль:

> `rez1:=solve({left,right,a,b});`

$$rez1 := \left\{ X0 = \frac{1}{2}, X1 = \frac{23}{8}, _C1 = -1, _C2 = \frac{3}{4} \right\}$$

> `y(x):=subs(rez1,y(x));assign(rez1);`

$$y(x) := -x + \frac{3}{4}$$

10. Находим значение функционала при полученном решении:


> `F(x,y(x),diff(y(x),x)):`

> `J;`

$$\frac{19}{8} \sqrt{2}$$

Варианты заданий

1. Найти расстояние между параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = x - 2$.
2. Найти расстояние между параболой $y = x^2 + 3$ и прямой $y = x - 3$.
3. Найти расстояние между параболой $y = x^2 + 3$ и прямой $y = x - 5$.
4. Найти расстояние между параболой $y = 2x^2$ и прямой $y = x - 3$.
5. Найти расстояние между параболой $y = 3x^2$ и прямой $y = x - 6$.
6. Найти расстояние между параболой $y = 2x^2 + 1$ и прямой $y = x - 4$.
7. Найти расстояние между параболой $y = 3x^2 + 2$ и прямой $y = x - 3$.
8. Найти расстояние между параболой $y = 2x^2 + 1$ и прямой $y = x - 5$.
9. Найти расстояние между параболой $y = 4x^2 + 1$ и прямой $y = x - 1$.
10. Найти расстояние между параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = x - 2$.

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

Тема 2.3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.

Лабораторная работа №2. Найти экстремаль функционала в пакете Maple.

Методические указания (рекомендации): использовать команды **Diff**, **diff**, **dsolve**.

Пример 2. Найти экстремаль для функционала $J[y(x)] = \int_0^1 y'(y' - x) dx$.

1. Задаем подинтегральную функцию и известные данные:

> **restart;**

> **F:=(x,Y,DY)->DY*(DY-x);**

$$F = (x, Y, DY) \rightarrow DY(DY - x)$$

> **x0:=0;x1:=1;**

$$x0 := 0$$

$$x1 := 1$$

2. Составляем функционал:

> **J:=int(F(x,y(x),diff(y(x),x)),x=x0..x1);**

$$J = \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) \left(\frac{d}{dx} y(x) - x \right) dx$$

3. Записываем основную формулу уравнения Эйлера:

> **eq:=diff(F(x,Y,DY),Y)-diff(diff(F(x,Y,DY),x),DY)-diff(diff(F(x,Y,DY),Y),DY)*DY-diff(F(x,Y,DY),DY\$2)*D2Y=0;**

$$eq := 1 - 2 D2Y = 0$$

4. Выполняем замены (оператор subs) $Y = y(x)$, $DY = y'(x)$, $D2Y = y''(x)$:

> **eq1:=subs(Y=y(x),DY=diff(y(x),x),D2Y=diff(y(x),x\$2),eq);**

$$eq1 := 1 - 2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) = 0$$

5. Находим общее решение уравнения Эйлера.

> **rez:=dsolve(eq1);**

$$rez := y(x) = \frac{1}{4} x^2 + _C1 x + _C2$$

> **assign(rez):y(x);**

$$\frac{1}{4} x^2 + _C1 x + _C2$$

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

6. Записываем естественные краевые условия на левом и правом концах $F_{y'}(x, y, y')|_{x=0} = 0$, $F_{y'}(x, y, y')|_{x=1} = 0$:

> $dFdY := \text{diff}(F(x, Y, DY), DY)$;

$$dFdY = 2 \cdot DY - x$$

> $us := \text{subs}(Y=y(x), DY=\text{diff}(y(x), x), D2Y=\text{diff}(y(x), x)\$2), dFdY)=0$;

$$us = 2 \cdot _C1 = 0$$

> $right := \text{subs}(x=x0, us)$;

$$right = 2 \cdot _C1 = 0$$

> $left := \text{subs}(x=x1, us)$;

$$left = 2 \cdot _C1 = 0$$

7. Решаем систему:

> $rez1 := \text{solve}(\{right, left\})$;

$$rez1 = \{_C1 = 0\}$$

> $y(x) := \text{subs}(rez1, y(x))$;

$$y(x) = \frac{1}{4} x^2 + _C2$$

8. Находим значение функционала при полученном решении:

> $F(x, y(x), \text{diff}(y(x), x))$;

$$-\frac{1}{4} x^2$$

> J ;

$$-\frac{1}{12}$$

Варианты заданий

Для своего варианта функционалов а), б), в) найти экстремали. Вычислить значения функционалов на найденных экстремалиях.

Вариант 1.

a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2) dx$; $y(-1) = 3$; $y(1) = 1$;

b). $J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y'e^{2x} + \sin^2 x) dx$; $y(0) = 1$; $y(2) = -2$;

c). $J(y) = \int_0^1 y\sqrt{1+y'^2} dx$; $y(0) = 2$; $y(1) = 3$;

Вариант 2.

a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 4y^2 + 2xy - x^2) dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 4$;

b). $J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y'\sin 2x - x^2) dx$; $y(0) = 1$; $y(2) = -1$;

c). $J(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$; $y(0) = 2$; $y(1) = 1$;

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

Вариант 3.

- a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 4x^2y + x \cos x) dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 0.5$;
- b). $J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y' \cos 2x + 5 \sin 3x) dx$; $y(0) = 2$; $y(2) = -3$;
- c). $J(y) = \int_0^1 yy'^2 dx$; $y(0) = 2$; $y(1) = 1$;

Вариант 4.

- a). $J(y) = \int_0^2 (y'^2 + 9y^2 + 2xy - x \sin x) dx$; $y(0) = 1$; $y(2) = 2$;
- b). $J(y) = \int_1^3 \left(y'^2 - \frac{4y'}{x} + x \sin x \right) dx$; $y(1) = 1$; $y(3) = -2$;
- c). $J(y) = \int_0^1 \sqrt{y(1+y^2)} dx$; $y(0) = 1$; $y(1) = 3$;

Вариант 5.

- a). $J(y) = \int_{-2}^0 (y'^2 - 4y^2 + 2y + xe^{2x}) dx$; $y(-2) = 0$; $y(0) = 1$;
- b). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 2y'e^x + \cos x) dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 3$;
- c). $J(y) = \int_1^3 y\sqrt{y'} dx$; $y(1) = 2$; $y(3) = 8$;

Вариант 6.

- a). $J(y) = \int_0^1 (y'^2 - 9y^2 + 2y \sin x - x^2 e^x) dx$; $y(0) = 1$; $y(1) = -1$;
- b). $J(y) = \int_{-1}^1 \left(y'^2 - \frac{2y'}{1+x^2} + e^{2x} \right) dx$; $y(-1) = 0$; $y(1) = 3$;
- c). $J(y) = \int_0^2 y\sqrt{1+y^2} dx$; $y(0) = -1$; $y(2) = -3$;

Вариант 7.

- a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 6ye^x + 2x \cos x) dx$; $y(-1) = 1$; $y(1) = 3$;
- b). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y'e^x \cos x - \sin x) dx$; $y(-1) = 1$; $y(1) = 2$;
- c). $J(y) = \int_0^2 yy'^2 dx$; $y(0) = 1$; $y(2) = 3$;

Вариант 8.

- a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + y^2 + 4ye^x - x \sin x) dx$; $y(-1) = 1$; $y(1) = 3$;
- b). $J(y) = \int_1^3 (y'^2 - y' \ln x + 2x) dx$; $y(1) = 2$; $y(3) = -1$;

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

$$c). J(y) = \int_0^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx; \quad y(0)=4; \quad y(2)=2;$$

Вариант 9.

$$a). J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 8ye^{2x} + 3x^2) dx; \quad y(-1)=1; \quad y(1)=3;$$

$$b). J(y) = \int_{-1}^1 (y' + y'^2 \cos^2 x - \sin^2 x) dx; \quad y(-1)=1; \quad y(1)=-2;$$

$$c). J(y) = \int_0^2 y \sqrt{y'} dx; \quad y(0)=2; \quad y(2)=4;$$

Вариант 10.

$$a). J(y) = \int_0^2 (2y'^2 + 2y^2 + y \cos x - 5x) dx; \quad y(0)=2; \quad y(2)=2;$$

$$b). J(y) = \int_1^3 (y' + y'^2 \sin^2 x + e^{2x}) dx; \quad y(1)=-1; \quad y(3)=4;$$

$$c). J(y) = \int_0^2 \sqrt{y(1+y'^2)} dx; \quad y(0)=2; \quad y(2)=1;$$

8. ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, РЕФЕРАТОВ

Данный вид работы не предусмотрен учебным планом.

9. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ

1 семестр (экзамен)

1. Функционал. Экстремум функционала. Вариация и ее свойства.
2. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.
4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности.
5. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами.
6. Задача Больца. Условия трансверсальности в задаче Больца.
7. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче Больца.
8. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования экстремума в задаче Лагранжа.
9. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса. Достаточные условия существования экстремума.
10. Два подхода к исследованию задач вариационного исчисления. Функциональное пространство. Производные Фреше и Гато.
11. Понятие о численных методах решения задач вариационного исчисления.

10. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ОБУЧАЮЩИХСЯ

Форма обучения: очная.

Название разделов и тем	Вид самостоятельной работы (проработка учебного материала, решение задач, реферат, доклад, контрольная)	Объем в часах	Форма контроля
-------------------------	--	---------------	----------------

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

	<i>работа, подготовка к сдаче зачета, экзамена и др.)</i>		
1 семестр			
Раздел 1. ВВЕДЕНИЕ			
1.1. История развития вариационного исчисления	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	8	устный опрос
Раздел 2. Классические задачи вариационного исчисления			
2.1. Функционал. Экстремум функционала. Вариация и ее свойства	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос
2.2. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос
2.3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос, сдача лабораторных работ
2.4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос, сдача лабораторных работ
2.5. Задача Больца. Условия трансверсальности в задаче Больца. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче Больца	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос
2.6. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования экстремума в задаче Лагранжа	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос
Раздел 3. Условия второго порядка			
3.1. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса. Достаточные условия существования экстремума	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	20	устный опрос
3.2. Два подхода к исследованию задач вариационного исчисления. Функциональное пространство. Производные Фреше и Гато	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос
3.3. Понятие о численных методах решения задач вариационного исчисления	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

11. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) Список рекомендуемой литературы

основная

1. Муратова, Т. В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для вузов / Т. В. Муратова. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 435 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01456-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/510931>
2. Васильева, А. Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / Васильева А. Б., Медведев Г. Н., Тихонов Н. А., Уразгильдина Т. А. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 432 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 10) - ISBN 5-9221-0276-1. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102761.html>

Дополнительная

1. Дьяконов В.П., Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах [Электронный ресурс] / Дьяконов В.П. - М. : ДМК Пресс, 2011. - 800 с. - ISBN 978-5-94074-751-2 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940747512.html>
2. Дифференциальные уравнения : практикум. Учебное пособие / Л. А. Альсевич, С. А. Мазаник, Г. А. Расолько, Л. П. Черенкова. — Минск : Вышэйшая школа, 2012. — 382 с. — ISBN 978-985-06-2111-5. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/20196.html>

учебно-методическая

1. Савинов Ю. Г. Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Вариационное исчисление» для студентов магистратуры по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» / Ю. Г. Савинов. - Ульяновск : УлГУ, 2022. - 10 с. - Неопубликованный ресурс. - URL: <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/13204>.
2. Савинов Ю. Г. Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Вариационное исчисление» для студентов магистратуры по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» / Ю. Г. Савинов. - Ульяновск : УлГУ, 2022. - 10 с. - Неопубликованный ресурс. - URL: <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/13203>.

Согласовано:


Специалист ведущий НБ УлГУ
Должность сотрудника научной библиотеки

Боброва Н.А.
ФИО


подпись

/ _____ 2023

дата

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

б) Программное обеспечение: МойОфис Стандартный, Альт Рабочая станция 8.
ОС Calculate Linux, Maplesoft Maple Educational.

в) Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы
Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы

1. Электронно-библиотечные системы:

1.1. Цифровой образовательный ресурс IPRsmart : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа». - Саратов, [2023]. – URL: <http://www.iprbookshop.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.2. Образовательная платформа ЮРАЙТ : образовательный ресурс, электронная библиотека : сайт / ООО Электронное издательство «ЮРАЙТ». – Москва, [2023]. - URL: <https://urait.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.3. База данных «Электронная библиотека технического ВУЗа (ЭБС «Консультант студента») : электронно-библиотечная система : сайт / ООО «Политехресурс». – Москва, [2023]. – URL: <https://www.studentlibrary.ru/cgi-bin/mb4x>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.4. Консультант врача. Электронная медицинская библиотека : база данных : сайт / ООО «Высшая школа организации и управления здравоохранением-Комплексный медицинский консалтинг». – Москва, [2023]. – URL: <https://www.rosmedlib.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.5. Большая медицинская библиотека : электронно-библиотечная система : сайт / ООО «Букап». – Томск, [2023]. – URL: <https://www.books-up.ru/ru/library/> . – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.6. ЭБС Лань : электронно-библиотечная система : сайт / ООО ЭБС «Лань». – Санкт-Петербург, [2023]. – URL: <https://e.lanbook.com>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.7. ЭБС **Znanium.com** : электронно-библиотечная система : сайт / ООО «Знаниум». - Москва, [2023]. - URL: <http://znanium.com> . – Режим доступа : для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

2. КонсультантПлюс [Электронный ресурс]: справочная правовая система. / ООО «Консультант Плюс» - Электрон. дан. - Москва : КонсультантПлюс, [2023].

3. Базы данных периодических изданий:

3.1. eLIBRARY.RU: научная электронная библиотека : сайт / ООО «Научная Электронная Библиотека». – Москва, [2023]. – URL: <http://elibrary.ru>. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный

3.2. Электронная библиотека «Издательского дома «Гребенников» (Grebinnikon) : электронная библиотека / ООО ИД «Гребенников». – Москва, [2023]. – URL: <https://id2.action-media.ru/Personal/Products>. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный.

4. Федеральная государственная информационная система «Национальная электронная библиотека» : электронная библиотека : сайт / ФГБУ РГБ. – Москва, [2023]. – URL: <https://нэб.рф>. – Режим доступа : для пользователей научной библиотеки. – Текст : электронный.

5. Российское образование : федеральный портал / учредитель ФГАУ «ФИЦТО». – URL: <http://www.edu.ru>. – Текст : электронный.

6. Электронная библиотечная система УлГУ : модуль «Электронная библиотека» АБИС Мега-ПРО / ООО «Дата Экспресс». – URL:

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

<http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Web>. – Режим доступа : для пользователей научной библиотеки. – Текст : электронный.

Согласовано:
 |  |  |
 Должность сотрудника УИТиТ | ФИО | подпись | дата

Аудитории для проведения лекций, для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, групповых и индивидуальных консультаций.

Аудитории укомплектованы специализированной мебелью, учебной доской. Аудитории для проведения лекций оборудованы мультимедийным оборудованием для предоставления информации большой аудитории. Помещения для самостоятельной работы оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде, электронно-библиотечной системе.

13. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) могут предлагаться одни из следующих вариантов восприятия информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей:

– для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

В случае необходимости использования в учебном процессе частично/исключительно дистанционных образовательных технологий, организация работы ППС с обучающимися с ОВЗ и инвалидами предусматривается в электронной информационно-образовательной среде с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

Разработчик



подпись

доцент

должность

Савинов Ю.Г.

ФИО